А.В. Борисов, Т.Н. Новикова

Национальный исследовательский университет «МЭИ», филиал в г.Смоленске, Смоленск

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКМ «MAPLE»

АННОТАЦИЯ

Излагается разработанная авторами методика применения системы компьютерной математики (СКМ) «Maple» при изучении со студентами темы «интегральное исчисление функций нескольких переменных». Приводятся конкретные задачи, требующие построения трехмерных поверхностей при решении задач, связанных с двойными и тройными интегралами.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении темы «интегральное исчисление функций нескольких переменных» у студентов возникают проблемы с построением трехмерных тел и поверхностей в трехмерном пространстве, особенно их пересечений и выделении замкнутой области. Поэтому авторами была разработана методика построения подобных тел в СКМ «Maple». Здесь приводится три задачи, связанные с кратными интегралами и необходимостью построения трехмерных тел и их проекций.

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$.

Решение

Поверхность $x^2 + y^2 = 4x$ есть круговой цилиндр, ось которого параллельна оси Oz, а $z = x$ и $z = 2x$ - плоскости, проходящие через ось Oy под разными углами наклона к плоскости xOy. Эти плоскости, пересекая цилиндр, вырезают из него клинообразный слой (рис.1), объем которого и требуется вычислить.

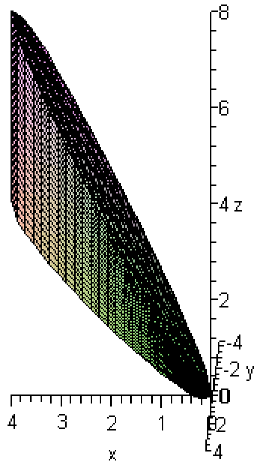

Рис. 1. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Приведем текст в «Maple», который строит данный рисунок.

```
> with(plots): with(student):
> A1:=plot3d([(u),(sqrt(4*u-u^2)),(v)],u=0..4,v=u..2*u,axes=normal):
> A2:=plot3d([(u),(-sqrt(4*u-u^2)),(v)],u=0..4,v=u..2*u,axes=normal):
> A3:=plot3d([(u),(v),(u)],u=0..4,v=-sqrt(4*u-u^2)..sqrt(4*u-u^2),axes=normal):
> A4:=plot3d([(u),(v),(2*u)],u=0..4,v=-sqrt(4*u-u^2)..sqrt(4*u-u^2),axes=normal):
> display({A1,A2,A3,A4},labels=[x,y,z],scaling=constrained,view = [0 .. 4, -4 .. 4, 0 .. 8]);
```

Проекцию на плоскость XOY можно получить, пользуясь возможностью вращения графиков, предоставляемых данной программой. Развернем соответствующим образом рисунок 1, получаем проекцию (рис. 2).

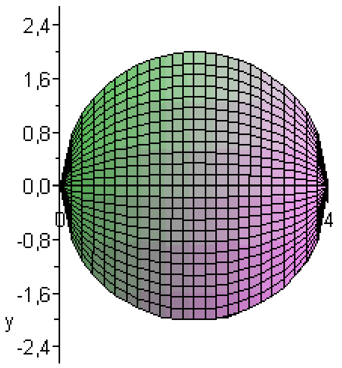

Рис. 2. Иллюстрация к задаче, проекция

Сам слой не является цилиндрическим брусом, и потому его объем не может быть вычислен непосредственно по формуле $V = \int\limits_{(D)} f(x,y)dS$.

Однако его можно рассматривать как разность двух цилиндрических брусов, срезанных сверху плоскостями $z = 2x$ [$f(x,y) = 2x$] и $z = x$ [$f(x,y) = x$]. Пределы изменения для x и y находим из уравнения контура области интегрирования $x^2 + y^2 = 4x$. Здесь удобнее взять постоянные пределы по $0 \le x \le 4$. Тогда по y будут: 0 – нижний предел, $\sqrt{4x - x^2}$ - верхний предел, и искомая половина объема тела представится в виде:

$$\frac{1}{2}V=\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}2xdy-\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}xdy=4\pi$$

Следовательно, $V = 8\pi$.

Вычисление интеграла в Maple происходит следующим образом:

> with(student):(Doubleint(2*x, y=0..sqrt(4*x-x^2), x=0..4)-Doubleint(x, y=0..sqrt(4*x-x^2), x=0..4))*2;

$$2\left(\int_0^4\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}2x\,dy\,dx\right)-2\left(\int_0^4\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}x\,dy\,dx\right)$$

> value(%);

$$8\pi$$

2. Вычислить площадь части поверхности $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Решение

Контуром проекции вырезанной части на плоскость xOy является лемниската $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$. Построим общий вид пересекающихся поверхностей (рис.3).

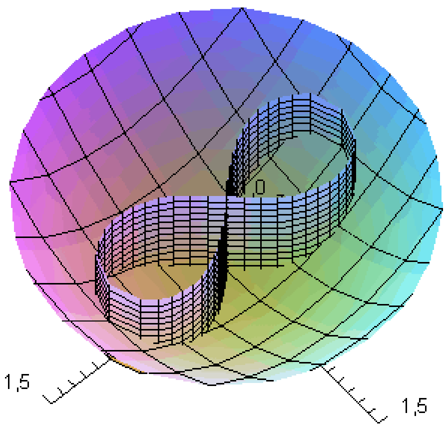

Рис. 3. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Приведем текст в «Maple», который строит данный рисунок.

> with(plots): > with(student):

> A1:=plot3d([(u),(v),((u^2+v^2)/2)],u=-4..4,v=-4..4,axes=normal):

> A2:=plot3d([(u),((1/2)*sqrt(-2-4*u^2+2*sqrt(8*u^2+1))),(v)],u=-1..1,v=-1..1,axes=normal):

> A3:=plot3d([(u),(-(1/2)*sqrt(-2-4*u^2+2*sqrt(8*u^2+1))),(v)],u=-1..1,v=-1..1,axes=normal):

> display({A1,A2,A3,A4,A5},labels=[x,y,z],scaling=constrained,view = [-1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5, 0 .. 1]);

Построим вырезаемую цилиндром поверхность (рис. 4):

$> solve\left(\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2,y\right);$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2-4x^2+2\sqrt{8x^2+1}},$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-2-4x^2+2\sqrt{8x^2+1}},$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{-2-4x^2-2\sqrt{8x^2+1}},$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-2-4x^2-2\sqrt{8x^2+1}}$$

A4 := *plot3d*([(*u*), (*v*), ((*u*^2 + *v*^2)/2)], *u* =−1 ..1, *v* =−(1/2) *sqrt(−2−4*u^2 + 2*sqrt(8*u^2 + 1)) ..(1/2)*sqrt(−2−4*u^2 + 2*sqrt(8*u^2 + 1)), *axes* = *normal*) :

display({*A4*}, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *scaling* = *constrained*, *view* = [−1.1 .. 1.1, −1.1 .. 1.1, 0 .. 1.1]);

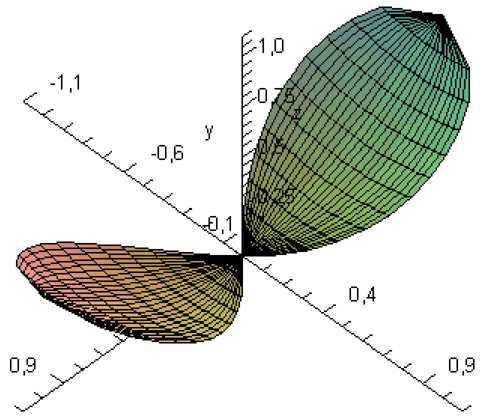

Рис. 4. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Цилиндр вырезает из параболоида два равных куска поверхности. Чтобы вычислить их общую площадь, воспользуемся формулой (1.10). Для нее из уравнения параболоида $z = (x^2 + y^2)/2$ получим подынтегральную функцию. $z'_x = x$, $z'_y = y$, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_x)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$.

Следовательно, $S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

Преобразуем интеграл к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Подынтегральная функция запишется в виде $\sqrt{1+x^2+y^2}=\sqrt{1+\rho^2}$, а уравнение лемнискаты – в виде $\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi$, или $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Так как параболоид и цилиндр симметричны относительно плоскостей xOz, yOz, то достаточно вычислить интеграл по одной четвертой части лемнискаты, расположенной в первой четверти плоскости xOz. Следовательно, пределами интегрирования будут: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le \sqrt{\cos 2\varphi}$. Получим:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \frac{5}{9} - \frac{\pi}{12},$$ откуда $S = \dfrac{20}{9} - \dfrac{\pi}{3}$.

Вычисление интеграла в Maple происходит следующим образом:

> with(student):Doubleint(4*rho*sqrt(1+rho^2), rho=0..sqrt(cos(2*phi)), phi=0..Pi/4);

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{\sqrt{\cos(2\phi)}} 4\rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\phi$$

> value(%);

$$-\frac{1}{3}\pi + \frac{20}{9}$$

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3. Тело V задано ограничивающими его поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $z = 0$ ($y \ge 0$, $z \ge 0$); $\mu = 5(x^2 + y^2)$; μ – плотность. Найти массу тела.

Решение

Так как, масса тела равна тройному интегралу от плотности:

$$m = \iiint_V \mu dxdydz,$$

следовательно, задача отыскания массы тела сводится к вычислению тройного интеграла от функции плотности по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 5).

Приведем текст в «Maple», который строит данный рисунок.

> restart; > with(plots): > with(student):

> A1:=plot3d([(u),((4-u^2)^0.5),(v)],u=-2..2,v=0..2,axes=normal):

> A2:=plot3d([((4-u^2)^0.5),(u),(v)],u=0..2,v=0..2,axes=normal):

> A2:=plot3d([((4-u^2)^0.5),(u),(v)],u=0..2,v=0..2,axes=normal):

> A3:=plot3d([(u),(v),((u^2+v^2)^0.5)],u=-2..2, v=0..(4-u^2)^0.5,axes=normal):

> A4:=plot3d([(u),(v),((u^2+v^2)^0.5)],v=0..2, u=0..(4-v^2)^0.5,axes=normal):

> A5:=plot3d([(u),(v),(0)],u=-2..2,v=0..(4-u^2)^0.5,axes=normal):

> A6:=plot3d([(u),(0),(v)],v=0..abs(u),u=-2..2):

> display({A1,A2,A3,A4,A5,A6},labels=[x,y,z], scaling=constrained);

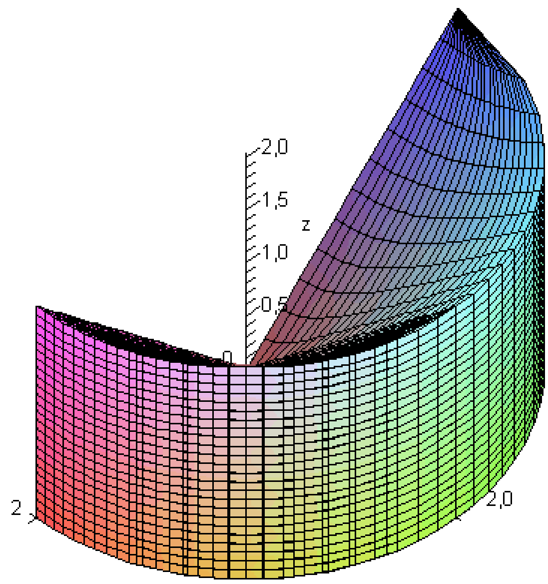

Рис. 5. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Иногда более наглядным может быть построение рисунка сеткой с прозрачными стенками (рис. 6):

> with(plots):

> A1:=plot3d([x,(4-x^2)^0.5,z],x=-2..2,z=0..2):

> A11:=plot3d([(4-y^2)^0.5,y,z],y=0..2,z=0..2):

> A2:=plot3d([x,y,(x^2+y^2)^0.5],x=-2..2,y=0..(4-x^2)^0.5):

> A22:=plot3d([x,y,(x^2+y^2)^0.5],y=0..2, x=0..(4-y^2)^0.5):

> A3:=plot3d([x,0,z],z=0..abs(x),x=-2..2):

> A4:=plot3d([x,y,0],x=-2..2,y=0..(4-x^2)^0.5):

> A44:=plot3d([x,y,0],y=0..2,x=-(4-y^2)^0.5..(4-y^2)^0.5,color=red,style=patch):

> A5:=spacecurve([2,0,z],z=0..2,color=blue, thickness=3):

> A6:=spacecurve([-2,0,z],z=0..2,color=blue, thickness=3):

> A7:=spacecurve([z,0,z],z=0..2,color=blue, thickness=3):

> A8:=spacecurve([-z,0,z],z=0..2,color=blue, thickness=3):

```
> A9:=spacecurve([x,(4-x^2)^0.5,2],x=-2..2,color=blue,thickness=3):
```

```
> A10:=spacecurve([x,(4-x^2)^0.5,0],x=-2..2,color=blue,thickness=3):
```

```
> A18:=spacecurve([x,0,0],x=-2..2,color=blue,thickness=3):
```

```
> display({A1,A11,A2,A22,A3,A4,A44,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A18},view=[-2..2,0..2,0..2]);
```

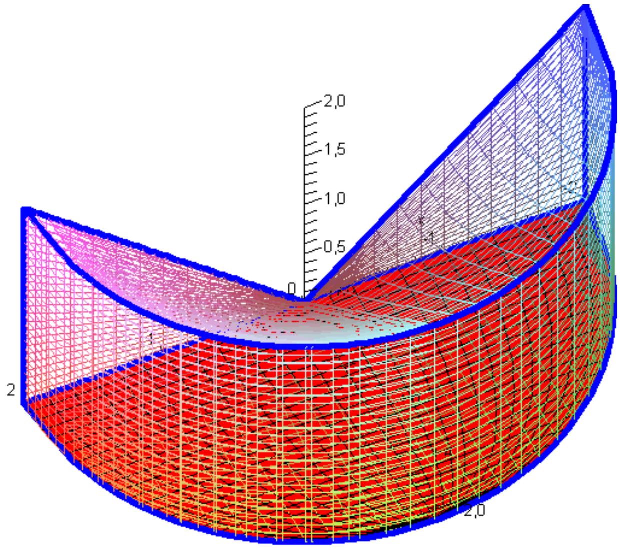

Рис. 6. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 7.

```
> A7:=plot3d([x,y,0],y=0..2,x=-(4-y^2)^0.5..(4-y^2)^0.5,color=blue,style=patch):
```

```
> display({A7},labels=[x,y,z], scaling=constrained);
```

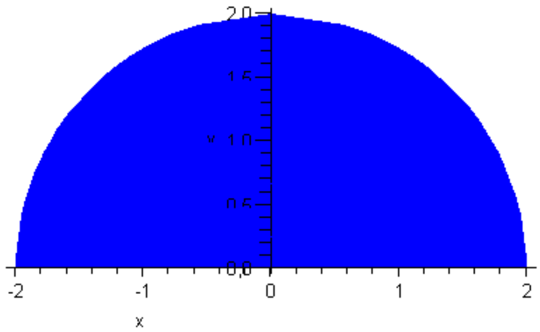

Рис. 7. Иллюстрация к задаче, трехмерное тело

Так как одна из образующих поверхности тела – цилиндр, то удобнее перейти в цилиндрическую систему координат. Уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат имеют вид:

$\mu = 5\rho^2$ – функция плотности,

$z = \rho$ – уравнение конуса,

$\rho = 2$ – уравнение цилиндра,

$\rho\sin\varphi = 0$ – уравнение плоскости,

$z = 0$ – уравнение плоскости.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.22) по переменной z от 0 до ρ, по переменной ρ от 0 до 2, по φ от 0 до π (т.к. проекция на плоскость xOy – верхняя часть окружности с радиусом равным 2, рис. 7). Тогда, с учетом якобиана перехода, имеем:

$$\iiint_V \mu \cdot dxdydz = \iiint_V \mu\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$\iiint_V 5\rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = 5\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{\rho} dz =$$

$$5\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \left(z\Big|_0^{\rho} \right) d\rho = 5\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^4 d\rho = 5\int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2 \right) d\varphi$$

$$= 32\int_0^{\pi} d\varphi = 32\,\varphi\Big|_0^{\pi} = 32\pi.$$

Вычислим этот интеграл в Maple.

```
> with(student):
```

```
> Tripleint(5*rho^3, z=0..rho, rho=0..2, phi=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2}\int_0^{\rho} 5\rho^3 \, dz\, d\rho\, d\phi$$

```
> value(%);
```

$$32\pi$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показаны на конкретных примерах методические и педагогические возможности использования СКМ «Maple» в образовательном процессе в техническом вузе при изучении курса «Высшая математика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борисов А.В., Новикова Т.Н.** Кратные интегралы: Методические указания к типовому расчету по курсам "Математика" и "Математический анализ". – Смоленск: Изд-во филиала ГОУВПО «МЭИ(ТУ)», 2008.

2. **Кузнецов Л.А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2005.

3. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3.: учеб. пособие для вузов. – М., 1963 – 656 с.